XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

Algoritmos da divisão: uma abordagem histórica (CO)

Heloisa Hernandez de Fontes Salvador
Universidade Severino Sombra
Brasil
helohsal@gmail.com

Resumo:

Este artigo tem como objetivo resgatar a discussão presente no primeiro segmento do ensino fundamental sobre o estudo do algoritmo da divisão através da análise de livros de *arithmetica* do século XIX. Espera-se que através deste resgate histórico, o professor possa refletir sobre sua prática e efetuar mudanças.

Palavras-chave: História da Educação Matemática; Divisão; Algoritmo; livros do século XIX.

Introdução

Um algoritmo pode ser considerado como um procedimento ou sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma tarefa que se deseja realizar. (Usiskinj, 1998, p. 7). Exemplos de algoritmos podem ser encontrados através da história, desde os tempos mais remotos dos antigos babilônicos. Considera-se que a palavra algoritmo deriva do nome do matemático árabe do século nono al-Khowãrizmi.

No primeiro segmento do ensino fundamental um grande tempo é dedicado ao estudo do algoritmo da divisão. Há muitos anos a discussão estava entre usar o método curto ou o método longo. De uns anos para cá vem ganhando força um método alternativo: a divisão por estimativas.

Engana-se aquele que pensa que esta discussão pertence aos nossos tempos. O presente artigo tem como objetivo resgatar esta discussão através da análise de livros de *arithmetica* do século XIX.

Segundo Valente (2007), a pesquisa em história da educação matemática representa um "alargamento da compreensão do processo de escolarização" do saber matemático. Logo, esperamos que esse artigo possibilite ao professor de matemática reflexões sobre sua prática, sobre a matemática como disciplina escolar, permitindo-o ampliar a compreensão de seu ofício.

Análise dos livros

Roswell C.Smith no prefácio da segunda edição do seu livro *Practical and Mental Arithmetic on a New Plan*, de 1827, diz que "a conveniência de fazer o estudioso compreender a natureza e a utilização da tabela de divisão antes de fazê-lo memorizar é suficientemente óbvio".

Inicia o estudo da divisão apresentando o quadro que será consultado para se responder a algumas perguntas:

DIVISION TABLE.

2 in 2— 1 time	4 in 4— 1 time	6 in 6— 1	8 in 8— 1
2 in 4— 2 times	4 in 8— 2 times	6 in 12— 2	8 in 16— 2
2 in 6— 3 times	4 in 12— 3 times	6 in 18— 3	8 in 24— 3
2 in 8— 4 times	4 in 16— 4 times	6 in 24— 4	8 in 32— 4
2 in 10— 5 times	4 in 20— 5 times	6 in 30— 5	8 in 40— 5
2 in 12— 6 times	4 in 24— 6 times	6 in 36— 6	8 in 48— 6
2 in 14— 7 times	4 in 28— 7 times	6 in 42— 7	8 in 56— 7
2 in 16— 8 times	4 in 32— 8 times	6 in 48— 8	8 in 64— 8
2 in 18— 9 times	4 in 36— 9 times	6 in 54— 9	8 in 72— 9
2 in 20—10 times	4 in 40—10 times	6 in 60—10	8 in 80—10
2 in 22—11 times	4 in 44—11 times	6 in 66—11	8 in 88—11
2 in 24—12 times	4 in 48—12 times	6 in 72—12	8 in 96—12
3 in 3— 1 time	5 in 5— 1 time	7 in 7— 1	9 in 9— 1
3 in 6— 2 times	5 in 10— 2 times	7 in 14— 2	9 in 18— 2
3 in 9— 3 times	5 in 15— 3 times	7 in 21— 3	9 in 27— 3
3 in 12— 4 times	5 in 20— 4 times	7 in 28— 4	9 in 36— 4
3 in 15— 5 times	5 in 25— 5 times	7 in 35— 5	9 in 45— 5
3 in 18— 6 times	5 in 30— 6 times	7 in 42— 6	9 in 54— 6
3 in 21— 7 times	5 in 35— 7 times	7 in 49— 7	9 in 63— 7
3 in 24— 8 times	5 in 40— 8 times	7 in 56— 8	9 in 72— 8
3 in 27— 9 times	5 in 45— 9 times	7 in 63— 9	9 in 81— 9
3 in 30—10 times	5 in 50—10 times	7 in 70—10	9 in 90—10
3 in 33—11 times	5 in 55—11 times	7 in 77—11	9 in 99—11
3 in 36—12 times	5 in 60—12 times	7 in 84—12	9 in 108—12
10 in 10— 1 time	11 in 11— 1 time	12 in 12— 1 time	
10 in 20— 2 times	11 in 22— 2 times	12 in 24— 2 times	
10 in 30— 3 times	11 in 33— 3 times	12 in 36— 3 times	
10 in 40— 4 times	11 in 44— 4 times	12 in 48— 4 times	
10 in 50— 5 times	11 in 55— 5 times	12 in 60— 5 times	
10 in 60— 6 times	11 in 66— 6 times	12 in 72— 6 times	
10 in 70— 7 times	11 in 77— 7 times	12 in 84— 7 times	
10 in 80— 8 times	11 in 88— 8 times	12 in 96— 8 times	
10 in 90— 9 times	11 in 99— 9 times	12 in 108— 9 times	
10 in 100—10 times	11 in 110—10 times	12 in 120—10 times	
10 in 110—11 times	11 in 121—11 times	12 in 132—11 times	
10 in 120—12 times	11 in 132—12 times	12 in 144—12 times	

(SMITH, 1827, p. 18)

Propõe a seguinte situação para explorar o conceito de divisão: "Divida 12 maçãs igualmente entre 2 meninos, quanto cada um ganhará? Quantas vezes o dois está em 12? Por quê?" (Smith, 1827, p. 38)

O conceito de divisão, os nomes dos termos da operação, o processo da prova real é dado através de perguntas e respostas porque para o autor, o aluno deve ser interrogado, suas próprias ideias consideradas e, se erradas, corrigidas por questões familiares e observações.

O primeiro algoritmo trabalhado é o chamado longo. Ele está associado a uma situação-problema: "Um homem morto deixou 857 dólares para serem divididos por seus quatro filhos, qual parte coube a cada um?" (Smith, 1827, p. 40). Nesta etapa o autor cita os passos que serão dados para se resolver a divisão usando o algoritmo: 1 – achar quantas vezes; 2 – multiplicar; 3 – subtrair; 4 – abaixar. Já apresenta a prova real.

```
Divis.Divid.Quot.
   4 ) 857 ( 214
       8
       —
        5
        4
        —
        17
        16
        —
         1
Proof.
214 Quotient.
  4 Dividend.
———
856
  1 Remainder.
———
857 Proof because
 like the dividend.
```

(Smith, 1827, p. 40).

Depois de propor várias situações para serem resolvidas usando o algoritmo longo, apresenta outro que chama de curto, também associado a uma situação-problema: "Dividir 463 dólares igualmente entre três homens".

```
       3)463
         ———
Ans.     154 dols. 1 rem
           3
         ———
Proof.   463
```

(Smith, 1827, p. 42).

Smith também propõe contas isoladas de contexto.

Em 1831, Henry B. Maglathlin, no prefácio de seu livro *The Complete Arithmetic* afirma que "[...] o desenvolvimento do poder da mente se dá através de hábitos fixos de atenção e processos de raciocínio lúcidos" (p. iv). Não apresenta a tabela da divisão, mas inicia com situações do tipo: "James tem 32 livros. Quantas vezes 8 livros ele tem? [...] Quantas vezes 9 centavos está em 54 centavo?"(Maglathlin, 1831, p. 38). Logo depois são apresentados os conceitos de divisão, os termos e alguns sinais usados. São propostas situações problemas para serem resolvidas oralmente. Depois, o processo do algoritmo curto é todo descrito. Não foi apresentada nenhuma situação problema, simplesmente a conta 8574 : 6.

```
Divisor  6) 8574   Dividend.
            ————
            1429   Quotient.
               6
            ————
Proof       8574
```

(Maghathlin, 1831, p. 41)

É apresentada uma divisão não-exata, também com o processo todo descrito, com a intenção de chamar atenção para o registro do resto.

```
          5) 6373
             ————
Quotient     1274 3/5
                5
             ————
             6370
                3
             ————
Proof        6373
```

(Maghathlin, 1831, p. 42)

Logo depois é que o processo do algoritmo longo é trabalhado:

```
             98 9/12  Quotient.
Divisor  12 )1185     Dividend.
             108
             ---
              105
               96
               --
                9
```

(Maghathlin, 1831, p.43)

Em 1841 Charles Davies, em seu *Arithmetic*, começa o capítulo de divisão com a seguinte situação: “Charles tem 12 maçãs e deseja dividi-las igualmente entre seus 4 irmãos” (Davies, 1841, p. 53).

Narra o que acontece: “Ele dá uma maçã para cada um. Distribui 4 e lhe sobram 8. Dá mais uma maçã a cada um. São mais 4 distribuídas e lhe sobram 4. Dá mais uma a cada um e não lhe sobra mais nenhuma maçã.” Por fim, apresenta o esquema de resolução:

```
OPERATION.
12
 4
--
 8 1st remain.
 4
--
 4 2d remain.
 4
--
 0 3d remain.
--
```

(Davies, 1841, p. 53)

Dá, ainda, outro exemplo: “Supondo que ele tenha 28 maças para dividir igualmente entre 8.”

```
OPERATION.
28
 8
--
20 1st remain.
 8
--
12 2d remain.
 8
--
 4 3d remain.
--
```

(Davies, 1841, p. 53)

Apresenta o conceito de divisão, as tabelas, define os termos da operação e, então, propõe o algoritmo pelo processo curto:

```
OPERATION.
Divisor. Dividend.
2)86                   OPERATION.        OPERATION.
  --                   3)729             5)36458
  43 quotient.           ---               -----
  --                     243               7291–3 remain.
```

(Davies, 1841, p. 55-57)

Depois, descreve todo o algoritmo pelo processo longo:

OPERATION.

```
Divisor.  Dividend.  Quotient.
327)11772(36
    981
    ----
    1962
    1962
    ----
    0000
```

(Davies, 1841, p.59)

Somente neste momento cobra a prova real:

OPERATION.

```
261)67289(257
    522
    ----
    1508
    1305
    ----
     2039
     1827
     ----
      212 Rem.
```

PROOF.

```
   261 Divisor.
   257 Quotient.
  ----
  1827
 1305
 522
   212 Remainder.
 -----
 67289=the dividend
```

(Davies, 1841, p. 61)

Davies apresenta ainda um processo para quando o divisor é um número composto:

2. Divide 4967 by 32.

```
         4)4967
4×8=32 { 8)1241 . . . . 3, 1st remainder
            155 . . . . 1×4+3=7 the true remainder.
```

(Davies, 1841, p.64)

Benjamin Greenleaf no seu livro *Introduction to the National Arithmetic*, de 1842, inicia a idéia da divisão com questões de cálculo mental: "Um homem gentil quer dividir 6 maçãs entre 2 meninos. Quantas cada um vai receber?" (Greenleaf, 1942, p. 20).

Apresenta o algoritmo pelo processo curto, seguido do longo com a prova real. Também trabalha com a divisão por números compostos.

Em 1854, Thomas H. Palmer, em seu livro *Arithmetic, oral and written, practilly applied by means of suggestive questions* inicia o estudo da divisão com vários cálculos como:

$4 \div 2$, $8 \div 2$, $6 \div 2$, $12 \div 2$, $18 \div 2$, $10 \div 2$, $14 \div 2$, $16 \div 2$, $9 \div 3$,

$\frac{18}{5}$ $\frac{17}{3}$ $\frac{26}{8}$ $\frac{30}{4}$ $\frac{25}{8}$ $\frac{17}{9}$ $\frac{23}{9}$ $\frac{37}{5}$ $\frac{29}{8}$ $\frac{27}{4}$ $\frac{66}{8}$ $\frac{74}{9}$ $\frac{27}{8}$

(Palmer, 1854, p. 167)

É apresentado o algoritmo da divisão pelo processo curto e a prova real:

Divisor,	4)63543	Dividend.
Quotient,	15885	" 3 undivided remainder.
Divisor,	4	
Proof,	63543	

(Palmer, 1854, p. 168)

A diferença deste livro aparece quando o algoritmo pelo processo longo será explorado. O autor solicita que o professor coloque os três cálculos apresentados no quadro-negro:

a. The Long Method.

Dividend,	64235	(24 Divisor.	
1st partial product,	48000	2000	Partial Quotients.
		600	
1st remainder,	16235	70	
2d partial product,	14400	6	
2d remainder,	1835	$2676\frac{11}{24}$	Total Quotient.
3d partial product,	1680	24	Divisor.
3d remainder,	155	64235	Proof 1, viz. divisor$\times$quot. [+remainder.
4th partial product,	144		
Undivided rem'r,	11		
Proof 2,	64235		Sum of products and last remainder.

b. Contracted Method, by omitting unnecessary ciphers.

Dividend,	64235	(24 Divisor.	
1st partial product,	48	$2676\frac{11}{24}$	Quotient.
1st remainder,	162	64235	Proof 1, viz., divisor$\times$quo- [tient+remainder.
2d partial product,	144		
2d remainder,	183		
3d partial product,	168		
3d remainder,	155		
4th partial product,	144		
Undivided remainder,	11		
Proof 2,	64235		Sum of products and last remainder.

15

c. Abridged Method, by performing the Subtraction mentally.

Dividend,	64235	(24 Divisor.	
Partial dividends formed of remainders and one figure from general dividend,	162	$2676\frac{1 1}{24}$	Quotient.
	183		
	155	64235	Proof.
	11		undivided remainder.

(Palmer, 1854, p.169)

Palmer chama de *Long Method* ao de estimativas, de *Contracted Method* ao longo e *Abridged Method*, ao curto. Acrescenta que iniciantes devem fazer uma tabela de produtos do divisor para ajudá-los no processo da divisão. Veja:

```
                    Dividend.
235 • 2=  470       59469805(235 Divisor factor.
    • 3=  705       470        253063 Quotient factor.
    • 4=  940       ——         ———————
    • 5=1175        1246    59469805 Proof.
    • 6=1410        1175
    • 7=1645        ———
    • 8=1880          719
    • 9=2115          705
                      ——
                       1480
                       1410
                       ———
                         705
                         705
                         ——
```

(Palmer, 1854, p. 172)

Tudo indica que deixa o aluno livre para escolher o método que deseja utilizar para realizar as divisões.

Considerações finais

Percebemos através dessa análise de alguns livros de *arithmetica* do século XIX que não havia consenso entre os autores no que diz respeito ao ensino da divisão, especificamente no trabalho com os algoritmos:

1827	1831	1841	1842	1854
*Tabela da divisão *Processo longo com prova real *Processo curto com prova real	*Processo curto com prova real *Processo longo com prova real	*Tabela da divisão *Processo das subtrações sucessivas * Processo curto * Processo longo com prova real *Processo da divisão por números compostos	*Processo curto *Processo longo com prova real *Processo da divisão por números compostos	*Cálculos mentais variados *Processo curto com prova real * Processo por estimativas com prova real *Processo longo com prova real

QUADRO 1: A divisão em algumas obras de Arithmética do século XIX

É interessante observar que no livro analisado de 1842 o autor define divisão como sendo um caminho curto de subtrações e não apresenta o algoritmo das subtrações sucessivas. No livro de 1827 temos o conceito de divisão como o processo de dividir um número em partes iguais, ou achar quantas vezes um número está contido em outro, enquanto que nos demais livros somente é abordada a ação de achar quantas vezes um número está contido em outro.

Sendo hoje reconhecido e estudado que para uma operação aritmética pode haver mais do que uma ideia (Toledo, 1997), é natural que discutamos qual é a que está ou não presente na realização de um determinado algoritmo e, por isso, quais são as situações e problemas que poderão facilitar o trabalho com esse algoritmo.

> A divisão está relacionada à subtração. Na verdade, ela é uma subtração reiterada de parcelas iguais, por isso apresenta questões semelhantes às daquela operação.
> O primeiro ponto que podemos destacar é o fato de a divisão estar ligada a duas diferentes ideias, *repartir igualmente e medir*, sendo a primeira bem mais enfatizada que a segunda. (Toledo, 1997, p.145)

A discussão de hoje relacionada ao algoritmo que deva ser utilizado no ensino da divisão e que encontramos no século XIX deve ser ampliada para aquela relacionada às ideias da operação e aos conceitos que estão por trás da utilização de qualquer algoritmo.

Outras observações podem ser feitas ao analisarmos tais livros, como por exemplo o registro de como era indicado o resto. No cálculo 1185 : 12 temos $98\frac{9}{12}$. Hoje em dia, dizemos 98 e resto 9. Temos, então, uma questão para investigar: por que ensinamos dessa forma e não da outra?

Tal como afirma Valente (2006), percebemos que a análise dos livros podem nos conduzir a processos de reflexão e de mudança hoje.

Referências bibliográficas

Davies, Charles. *Arithmetic: designed for academies and schools*. Philadelphia: 1841. Disponível em http://books.google.com/books/download/Arithmetic.pdf?id=bCSHpZu-OMQC&hl=ptBR&capid=AFLRE70c4TOoZf5pH_CTia2xOT0R0FsZ1jZPPre0_FRfgMgB8kh5rBolR3BcFxE0wzamUhIJmp31r46TowHV4I6Lg8q5D0hneHobR1j1jy_KAzQDPfKOBSc&continue=http://books.google.com/books/download/Arithmetic.pdf%3Fid%3DbCSHpZu-OMQC%26hl%3Dpt-BR%26output%3Dpdf. Acesso em 04/06/2010.

Greenleaf, Benjamin. *Introduction to the National Arithmetic*. Boston: 1842. Disponívelemhttp://books.google.com/books?id=dAgj4vuPuisC&printsec=frontcover&dq=bibliogroup:%22Harvard+science+and+math+textbooks+preservation+microfilm+project%22&lr=&ei=Z_QITKCHD5iWyAS-jJWlBw&hl=pt-BR&cd=25#v=onepage&q&f=false. Acesso em 04/06/2010.

Maglathlin, Henry Bartlett; Greenleaf, Benjamin. *The complete arithmetics: oral and written.* Boston, 1831. Disponível em http://books.google.com/books?id=19ZGAAAAIAAJ&printsec=frontcover&dq=bibliogroup:%22Harvard+science+and+math+textbooks+preservation+microfilm+project%22&lr=&ei=V1YJTJ73N4WyzgTGj9DcAw&hl=pt-BR&cd=338#v=onepage&q&f=false. Acesso em 04/06/2010.

Palmer, Thomas. *Arithmetic oral and written practilly applied by means suggestive questions*. Andrews' series of latin school books. Boston: 1854. Disponível em http://books.google.com/books?id=mWQE1_mhbcEC&printsec=frontcover&dq=bibliogroup%3A%22Harvard%20science%20and%20math%20textbooks%20preservation%20microfilm%20project%22&lr&hl=pt-BR&source=gbs_slider_thumb#v=onepage&q&f=false. Acesso em 04/06/2010.

Smith, Roswell C. *Practical and Mental Arithmetic*. Second Edition. Boston: 1827. Disponívelemhttp://books.google.com/books?id=LbA4AAAAMAAJ&printsec=frontcover&dq=bibliogroup:%22Harvard+science+and+math+textbooks+preservation+microfilm+project%22&lr=&

ei=Z_QITKCHD5iWyAS-jJWlBw&hl=pt-BR&cd=27#v=onepage&q&f=false. Acesso em 04/06/2010.

Toledo, Marília. *Didática de Matemática: como dois e dois: a construção da matemática*. São Paulo: FTD, 1997

Usiskinj, Zalman. Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age. In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 7-20. NCTM, Reston, Virgínia

Valente, W. R. História da Educação Matemática**:** interrogações metodológicas. In *REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática*. V.22, p. 28,49, UFSC:2007a.Disponívelemhttp://www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2007_pdf/revista_2007_02_completo.PDF